Pitkä matematiikka 25.9.2009, ratkaisut:

1. **a)** $(x-2)(x-3) = 6 \iff x^2 - 5x + 6 = 6 \iff x(x-5) = 0 \iff x = 0$ tai $x = 5$.

b) $\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{1}{x} = 1 \iff x^2 - (x-3) = x(x-3) \iff 2x = -3 \iff x = -\frac{3}{2}$.

c) $(5-\sqrt{2})^2 = 5^2 - 10\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 27 - 10\sqrt{2}$. Koska $5-\sqrt{2} > 0$, on $\sqrt{27-10\sqrt{2}} = 5-\sqrt{2}$.

Vastaus: **a)** $x = 0$ tai $x = 5$, **b)** $x = -\frac{3}{2}$.

2. **a)** $6(x-1) + 4 \geq 3(7x+1) \iff 6x - 2 \geq 21x + 3 \iff 15x \leq -5 \iff x \leq -\frac{1}{3}$.

b) $\sqrt{x+2} = 3 \iff x + 2 = 9 \iff x = 7$.

c) Jos $\sin(x/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on $x/2 = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$ tai $x/2 = \pi - \frac{\pi}{4} - 2n\pi$ eli $x = \frac{\pi}{2} + 4n\pi$ tai $x = \frac{3\pi}{2} + 4n\pi$ $n \in \mathbf{Z}$.

Vastaus: **a)** $x \leq -\frac{1}{3}$, **b)** $x = 7$, **c)** $x = \frac{\pi}{2} + 4n\pi$ tai $x = \frac{3\pi}{2} + 4n\pi$.

3. **a)** Jos $f(x) = ax^2e^x + bxe^x$, on $f'(x) = 2axe^x + ax^2e^x + be^x + bxe^x = ax^2e^x + (2a+b)xe^x + be^x$. Tämä on $2x^2e^x + xe^x - 3e^x$, jos $a = 2$ ja $b = -3$, jolloin myös $2a + b = 1$.

b) $\int_{-1}^{4/9} \dfrac{1}{\sqrt{x+5}} dx = \Big/_{-1}^{4/9} 2\sqrt{x+5} = 2(\sqrt{\frac{49}{9}} - \sqrt{4}) = \frac{2}{3}$.

Vastaus: **a)** $a = 2$ ja $b = -3$, **b)** $\frac{2}{3}$.

4. Jos sivujen pituudet ovat desimetreinä $2a$, $3a$, $4a$, on $2a \cdot 3a \cdot 4a = 10$ eli $24a^3 = 10$. Siis $a = \sqrt[3]{\frac{5}{12}} \approx 0{,}74690$.

Vastaus: 14,9 cm, 22,4 cm ja 29,9 cm.

5. $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{AA} = \overline{0}$.

Vastaus: $\overline{0}$.

6. Merkitään $A = (-5,3)$, $B = (2,-1)$ ja $C = (4,8)$. Tällöin $\overline{AB} = 7\overline{i} - 4\overline{j}$, $\overline{BC} = 2\overline{i} + 9\overline{j}$, $\overline{AC} = 9\overline{i} + 5\overline{j}$. Pisteessä A olevalle kulmalle α pätee

$\cos\alpha = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}|\,|\overline{AC}|} = \dfrac{43}{\sqrt{65}\sqrt{106}} \approx 0{,}5180347$. Siis $\alpha \approx 58{,}7995^\circ$.

Pisteessä B olevalle kulmalle β pätee $\cos\beta = \dfrac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}|\,|\overline{BC}|} = \dfrac{22}{\sqrt{65}\sqrt{85}} \approx 0{,}2959760$. Siis $\beta \approx 72{,}7839^\circ$.

Kolmion kolmas kulma $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 48{,}4166$.

Koska $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \dfrac{71}{\sqrt{65}\sqrt{106}}$, on kolmion ala $\frac{1}{2}|\overline{AB}|\,|\overline{AC}|\sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 71 = 39{,}5$.

Vastaus: Kulmat $58{,}8^\circ$, $72{,}8^\circ$ ja $48{,}4^\circ$; ala 39,5.

7. Omenoiden lukumäärä on muotoa $4n + k$, missä $k = 0, 1, 2$ tai 3. Näin ollen P(omenat jakautuvat tasan) $= \frac{1}{4}$ ja P(omenat eivät jakaudu tasan) $= \frac{3}{4}$. Siis A:n saaman rahamäärän odotusarvo on $\frac{3}{4} \cdot 3 \cdot 25 - \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot 50 = 18{,}75$.

Vastaus: 18,75 euroa.

8. Osoittajan $p(x) = -x^2 + x + 2$ nollakohdat ovat $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$ eli $x = -1$ tai $x = 2$. Koska $p(x)$:n kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, on $p(x) > 0$, kun $-1 < x < 2$ ja $p(x) < 0$, kun $x < -1$ tai $x > 2$.

Nimittäjä $q(x) = x(x^2 + 2x - 3)$ häviää, kun $x = 0$. Muut nimittäjän nollakohdat ovat $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = -1 \pm 2$ eli $x = -3$ ja $x = 1$. Koska $x^2 + 2x - 3$ esittää ylöspäin aukeavaa paraabelia, on $q(x) > 0$, kun $-3 < x < 0$ tai $x > 1$ ja $q(x) < 0$, kun $x < -3$ tai $0 < x < 1$.

Yhdistämällä merkkitarkastelut nähdään, että murtolauseke $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$, kun $x < -3$ tai $-1 < x < 0$ tai $1 < x < 2$.

Vastaus: $x < -3$ tai $-1 < x < 0$ tai $1 < x < 2$.

9. Alaspäin aukeavan paraabelin huippu on pisteessä $(0, 5)$ ja paraabeli leikkaa x-akselia pisteissä $(\pm\sqrt{5}, 0)$. Paraabelin pisteen $(x, 5-x^2)$ etäisyys origosta on $\sqrt{x^2 + (5 - x^2)^2} = \sqrt{x^4 - 9x^2 + 25}$. Riittää tarkastella etäisyyden neliötä $f(x) = x^4 - 9x^2 + 25$. Derivaatta $f'(x) = 4x^3 - 18x = x(4x^2 - 18) = 0$, kun $x = 0$ tai $x = \pm\sqrt{\frac{18}{4}} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$. Näillä arvoilla $f(0) = 25$ ja $f(\pm\frac{3}{\sqrt{2}}) = \frac{9}{2} + (5 - \frac{9}{2})^2 = \frac{19}{4}$. Koska $f(x)$ aukeaa ylöspäin, saavuttaa se pienimmän arvonsa, kun $x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$, jolloin $y = 5 - x^2 = \frac{1}{2}$.

Vastaus: Pisteet $(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ ja $(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$.

10. Käyrien leikkauspisteet saadaan yhtälöstä $e^x = 4 - 3e^{-x} \iff (e^x)^2 - 4e^x + 3 = 0$. Tästä ratkeaa $e^x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = 2 \pm 1$ eli $e^x = 1$ tai $e^x = 3$. Siis $x = 0$ tai $x = \ln 3 \approx 1{,}099$. Koska $e^1 < 4 - 3e^{-1}$, on pinta-ala $A = \int_0^{\ln 3}(4 - 3e^{-x} - e^x)dx = \Big/_0^{\ln 3} 4x + 3e^{-x} - e^x = 4\ln 3 + \frac{3}{3} - 3 - (3 - 1) = 4\ln 3 - 4 \approx 0{,}394449$.

Vastaus: $4\ln 3 - 4 \approx 0{,}394$.

11. Jos janan pituus on a, poistetaan ensimmäisellä kerralla $\frac{1}{3}a$. Jää kaksi $\frac{1}{3}a$:n mittaista palaa, joista kummastakin poistetaan $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}a$ eli yhteensä $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}a$. Jää neljä $(\frac{1}{3})^2a$:n mittaista palaa, joista kustakin poistetaan $\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{3})^2a$ eli yhteensä $\frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^2a$. Jää kahdeksan $(\frac{1}{3})^3a$:n mittaista palaa, joista kustakin poistetaan $\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{3})^3a$ eli yhteensä $\frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^3a$. Näin jatkamalla nähdään, että poistettujen osien pituuksien summa on $\frac{1}{3}a(1 + \frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^3 + ...) = \frac{1}{3}a\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^n = \frac{1}{3}a\dfrac{1}{1 - \frac{2}{3}} = a$.

Vastaus: Poistettujen osien yhteinen pituus on sama kuin janan pituus.

12. **a)** Parittomien lukujen $n = 2p + 1$ ja $m = 2q + 1$ summa $n + m = 2p + 1 + 2q + 1 = 2(p + q + 1)$ on esitysmuotonsa perusteella parillinen luku.
b) Parittomien lukujen $n = 2p + 1$ ja $m = 2q + 1$ tulo $nm = (2p + 1)(2q + 1) = 2(2pq + p + q) + 1$ on esitysmuotonsa perusteella pariton luku.

13. Väliarvolauseen mukaan $f(3) - f(\frac{1}{2}) = f'(z)(3 - \frac{1}{2})$, missä $\frac{1}{2} \le z \le 3$. Siis
$f(3) = f(\frac{1}{2}) + f'(z)(3 - \frac{1}{2}) \le 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{23}{8}$ ja $f(3) \ge 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{13}{8}$.
Vastaus: $\frac{13}{8} \le f(3) \le \frac{23}{8}$.

***14. a)** Kolmannen asteen polynomin yleinen muoto on $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tällöin $p(0) = d$, $p(1) = a + b + c + d$ ja $p(2) = 8a + 4b + 2c + d$. Tämän mukaan

$\int_0^2 p(x)dx = \overset{2}{\underset{0}{/}} \frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{3}bx^3 + \frac{1}{2}cx^2 + dx = 4a + \frac{8}{3}b + 2c + 2d =$

$\frac{1}{3}(d + 4(a + b + c + d) + (8a + 4b + 2c + d)) = \frac{1}{3}(p(0) + 4p(1) + p(2))$,

mikä piti osoittaa.

b) Polynomille $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ on $p(0) = 1$, $p(1) = 4$ ja $p(2) = 15$. Edellisen mukaan $\int_0^2 p(x)dx = \frac{1}{3}(1 + 4 \cdot 4 + 15) = \frac{32}{3}$.

c) Jos valitaan polynomiksi $p(x) = x^4$, on $\frac{1}{3}(p(0) + 4p(1) + p(2)) = \frac{1}{3}(0 + 4 + 16) = \frac{20}{3}$ ja $\int_0^2 p(x)dx = \overset{2}{\underset{0}{/}} \frac{1}{5}x^5 = \frac{32}{5}$. Koska $\frac{32}{5} = 6{,}4 \neq 6\frac{2}{3} = \frac{20}{3}$, kaava ei päde neljännen asteen polynomille x^4.

***15. a)** Olkoon kartio katkaistu kartiosta, jonka korkeus on $h + y$. Leikataan kartiota korkeusjanan kautta kulkevalla tasolla. Pohjan suuntaiset leikkaukset ovat ympyröitä. Jos korkeudella z olevan ympyrän säde on x, saadaan yhdenmuotoisuudesta $\dfrac{y}{r_2} = \dfrac{h+y}{r_1}$. Tästä saadaan $y = \dfrac{r_2 h}{r_1 - r_2}$. Edelleen saadaan yhdenmuotoisuudesta, että $\dfrac{x}{r_2} = \dfrac{y + h - z}{y}$. Tästä saadaan $x = r_1 - (r_1 - r_2)\dfrac{z}{h}$.

Pohjan suuntaisen leikkauksen pinta-ala korkeudella z on nyt

$a(z) = \pi x^2 = \pi(r_1 - (r_1 - r_2)\dfrac{z}{h})^2$.

b) $\int_0^h a(z)dz = \pi \overset{h}{\underset{0}{/}} \frac{1}{3}(r_1 - (r_1 - r_2)\dfrac{z}{h})^3(-\dfrac{h}{r_1 - r_2}) = \dfrac{\pi h}{3(r_1 - r_2} \cdot (r_1^3 - r_2^3) =$

$\dfrac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$.

c) Katkaistun kartion tilavuuden kaava on $V = \dfrac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$. Näin ollen edellä laskettu integraali antaa katkaistun kartion tilavuuden.

d) Olkoon r-säteisen pallon keskipiste koordinaatiston origossa. Palloa leikkaava, koordinaattiakselia vastaan kohtisuora taso leikkaa akselia kohdassa $z \in [-r, r]$. Leikkausympyrän säde x toteuttaa yhtälön $x^2 + z^2 = r^2$, joten $x = \sqrt{r^2 - z^2}$. Pohjaympyrän ala on $a(z) = \pi x^2 = \pi(r^2 - z^2)$.

Nyt $\int_{-r}^r a(z)dz = \pi \overset{r}{\underset{-r}{/}} r^2 z - \frac{1}{3}z^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$. Siis integraali antaa pallon tilavuuden.