

## Lyhyt matematiikka 24.3.2010, ratkaisut:

1. a)  $\frac{1}{2}(3x - 2) = \frac{1}{3}(2x + 3) \iff 3(3x - 2) = 2(2x + 3) \iff 9x - 6 = 4x + 6 \iff 5x = 12 \iff x = \frac{12}{5}$ .

b)  $(x + 2)(x - 2) = 5 \iff x^2 - 4 = 5 \iff x^2 = 9 \iff x = \pm 3$ .

c) Suorien leikkauspiste toteuttaa yhtälöparin  $x + y = 2$ ,  $2x - y = 5$ . Laskemalla yhteen saadaan  $3x = 7$ , josta  $x = \frac{7}{3}$  ja  $y = 2 - x = -\frac{1}{3}$ .

Vastaus: a)  $x = \frac{12}{5}$ , b)  $x = -3$  tai  $x = 3$ , c)  $x = \frac{7}{3}$ ,  $y = -\frac{1}{3}$ .

2. a) Neliön sivun pituudelle  $x$  m saadaan yhtälö  $x^2 = 1,2$ , josta  $x = \sqrt{1,2}$ . Neliön lävistäjän pituus on  $x\sqrt{2} = \sqrt{2,4} \approx 1,54919$  (m).

b) Jos  $x^4 = 17$ , on  $x = \sqrt[4]{17} \approx 2,03054$ .

c)  $4^0 - 3^{-1} + 2^{-2} - 1^{-3} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{4}{12} + \frac{3}{12} = -\frac{1}{12}$ .

Vastaus: a) 1,55 m, b)  $x \approx 2,031$ , c)  $-\frac{1}{12}$ .

3. a) Nollakohdat ovat noin  $-2$ ;  $0,5$ ;  $2,8$ .

b) Derivaatan nollakohdat ovat noin  $-1$  ja  $2$ .

c) Funktion suurin arvo on noin  $5$ .

d) Funktion pienin arvo on noin  $-5$ .

e) Funktio on kasvava välillä  $[-2, -1]$  ja  $[2, 3]$ .

f) Funktio on vähenevä välillä  $[-1, 2]$ .

4. Jos lisättävä määrä on  $x$  litraa, on

$$\frac{12}{100}x + \frac{5}{100} \cdot 3 = \frac{8}{100}(x + 3) \iff 12x + 15 = 8x + 24 \iff 4x = 9 \iff x = \frac{9}{4}.$$

Vastaus: 2,25 litraa.

5. Viiden prosentin koron korkotekijä on  $1,05$ . Tuhannen euron talletuksen arvo on  $n$  vuoden kuluttua  $1000 \cdot 1,05^n$  euroa. Arvolla  $n = 0$  saadaan alkutalletus  $1000$  euroa. Muut arvot ovat oheisessa taulukossa.

|                     |         |         |         |         |          |
|---------------------|---------|---------|---------|---------|----------|
| $n$                 | 5       | 10      | 15      | 20      | 25       |
| $1000 \cdot 1,05^n$ | 1276,28 | 1628,89 | 2078,93 | 2653,30 | 3386,35  |
| $n$                 | 30      | 35      | 40      | 45      | 50       |
| $1000 \cdot 1,05^n$ | 4321,94 | 5516,02 | 7039,99 | 8985,01 | 11467,40 |

6. Funktio on  $f(x) = (x-2)(3-x) = -x^2 + 5x - 6$ . Sen derivaatta  $f'(x) = -2x + 5$  häviää, kun  $x = \frac{5}{2}$ . Derivaatan nollakohta on välillä  $[-3, 3]$ . Koska  $f(-3) = -30$ ,  $f(\frac{5}{2}) = \frac{1}{4}$  ja  $f(3) = 0$ , on funktion suurin arvo  $f(\frac{5}{2})$  ja pienin arvo  $f(-3)$ .

Vastaus: Suurin arvo  $\frac{1}{4}$  ja pienin arvo  $-30$ .

7. Hypotenuusan pituus on  $\sqrt{3,2^2 + 5,7^2} = \sqrt{42,73} \approx 6,5368$  (cm). Olkoon sitten  $h$  hypotenuusaa vastaan piirretty korkeus ja  $\alpha$  lyhyemmän kateetin vastainen kulma. Tällöin  $\frac{h}{5,7} = \sin \alpha = \frac{3,2}{\sqrt{42,73}}$ , josta saadaan  $h = \frac{5,7 \cdot 3,2}{\sqrt{42,73}} \approx 2,7903$  (cm).

*Vastaus:* Hypotenuusan pituus on 6,5 cm ja suoran kulman kärjen etäisyys hypotenuusasta 2,8 cm.

8. a) Oikeana saapuvan bitin todennäköisyys on  $p = 1 - 0,00015 = 0,99985$ . Todennäköisyys, että 16 bitin jonossa ei ole virheellisyyksiä on  $p^{16} \approx 0,99760270$ . Todennäköisyys, että on ainakin yksi virheellinen bitti, on  $1 - p^{16} \approx 0,0023973$ .

b) Todennäköisyys sille, että lähetetään 32 kappaletta 16 bitin jonoja virheettä on  $(p^{16})^{32} \approx 0,9260697$ . Todennäköisyys sille, että ainakin yksi jono on virheellinen, on  $1 - (p^{16})^{32} \approx 0,073930$ .

*Vastaus:* a) 0,0024, b) 0,074.

9. Yhdysjanan keskipiste on  $(\frac{8-1}{2}, \frac{4+1}{2}) = (\frac{7}{2}, \frac{5}{2})$ . Yhdysjanan kulmakerroin on  $\frac{4-1}{8+1} = \frac{1}{3}$ . Sitä vastaan kohtisuoran suoran kulmakerroin on  $-3$ , joten suoran yhtälö on  $y - \frac{5}{2} = -3(x - \frac{7}{2})$  eli  $y = -3x + 13$ . Kun  $x = 0$ , on  $y = 13$  ja kun  $y = 0$ , on  $x = \frac{13}{3}$ . Leikkauspisteet koordinaattiakselien kanssa ovat  $(0, 13)$  ja  $(\frac{13}{3}, 0)$ .

*Vastaus:* Suoran yhtälö on  $y = -3x + 13$  ja leikkauspisteet  $(0, 13)$  ja  $(\frac{13}{3}, 0)$ .

10. Kolmion pyörähtäessä lyhyemmän kateettinsa ympäri syntyy kartio, jonka korkeus on 2 ja pohjaympyrän säde 3. Kartion tilavuus on  $\frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 2 = 6\pi$ .

11. Järjestetään laskutulokset taulukoksi.

| a) | $n$ | $a_n$       | b) | $n$ | $a_n$       |
|----|-----|-------------|----|-----|-------------|
|    | 0   | 3           |    | 0   | 8           |
|    | 1   | 1,833333333 |    | 1   | 4,125000000 |
|    | 2   | 1,462121212 |    | 2   | 2,304924242 |
|    | 3   | 1,414998430 |    | 3   | 1,586315860 |
|    | 4   | 1,414213780 |    | 4   | 1,423549408 |

Vielä on laskettava kummassakin tapauksessa  $100(\frac{a_4}{\sqrt{2}} - 1)$ .

a) Poikkeama on 0,000015 %, b) Poikkeama on 0,66 %.

12. Täydentämällä yhtälön oikea puoli neliöksi saadaan

$$y = 2x^2 - 4x - 1 = 2(x^2 - 2x + 1) - 3 = 2(x - 1)^2 - 3 \text{ eli } y + 3 = 2(x - 1)^2.$$

Tästä nähdään, että  $a = 2$ ,  $h = 1$  ja  $k = -3$ . Samoin tästä nähdään, että huipun koordinaatit ovat  $(1, -3)$ .

13. a) Taulukosta saadaan 30 000 euron lahjoituksesta menevän veron määrälle lauseke  $1010 + \frac{10}{100}(30\,000 - 17\,000) = 2310$ . Veroa menee siis 2310 euroa.

b) Jos funktio  $f(x)$  antaa lahjaveron riippuvuuden lahjan arvosta, niin sen kuvaaja  $y = f(x)$  on murtoviiva, missä

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } 0 \leq x < 4000, \\ 100 + 0,07(x - 4000), & \text{kun } 4000 \leq x < 17\,000, \\ 1010 + 0,10(x - 17\,000), & \text{kun } 17\,000 \leq x < 50\,000, \\ 4310 + 0,13(x - 50\,000), & \text{kun } 50\,000 \leq x. \end{cases}$$

14. Olkoon  $p$  hinnankorotusprosentti ja  $q = 1 + \frac{p}{100}$ . Tällöin  $194,26q^6 = 249$ , josta

$$q = \sqrt[6]{\frac{249}{194,26}} \approx 1,042244 \text{ ja } p = 100(q - 1) \approx 4,2244.$$

Vastaus: 4,22 %.

15. Ehdon  $\bar{a} + \bar{b} = 5\bar{j}$  mukaan  $-\bar{x}i + \bar{y}j + \bar{x}i + \bar{y}j = 5\bar{j} \iff 2\bar{y}j = 5\bar{j} \iff y = \frac{5}{2}$ .

Kulmaehdon mukaan  $\frac{y}{x} = \tan 2^\circ \iff x = \frac{5/2}{\tan 2^\circ} \approx 71,59063$ .

Vastaus:  $x = \frac{5}{2 \tan 2^\circ} \approx 71,59$ ,  $y = \frac{5}{2}$ .