



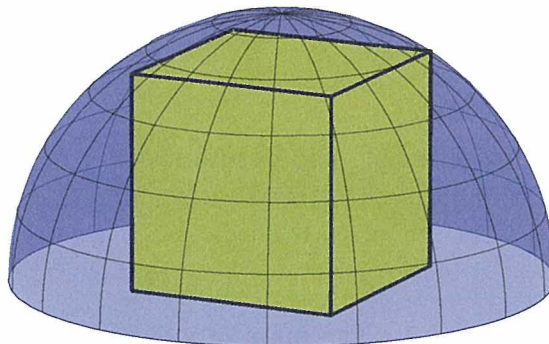
Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä (★) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1.
 - a) Ratkaise yhtälö $7x^7 + 6x^6 = 0$.
 - b) Sievennä lauseke $(\sqrt{a} + 1)^2 - a - 1$.
 - c) Millä x :n arvoilla pätee $\frac{3}{3 - 2x} < 0$?

2.
 - a) Laske integraali $\int_0^1 (e^x + 1) dx$.
 - b) Derivoi funktio $x \sin x$.
 - c) Minkä luvun 2-kantainen logaritmi on 5?

3.
 - a) Kolmion sivujen pituudet ovat 2, 4 ja 5. Laske kolmion suurin kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.
 - b) Määritä toisen asteen yhtälön $x^2 + px + q = 0$ kertoimet p ja q , kun yhtälön juuret ovat $-2 - \sqrt{6}$ ja $-2 + \sqrt{6}$.

4. Puolipallon sisällä on kuutio siten, että sen yksi sivutahko on puolipallon pohjatasolla ja vastakkaisen sivutahkon kärkipisteet ovat pallopinnalla. Kuinka monta prosenttia kuution tilavuus on puolipallon tilavuudesta?



5. Vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} summa on vektori $4\vec{i} + \vec{j}$ ja niiden pistetulo on $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$. Vektori \vec{b} on yhdensuuntainen vektorin \vec{i} kanssa. Määritä vektorit \vec{a} ja \vec{b} .
6. a) Laatikossa on kaksi eriväristä palloa. Laatikosta nostetaan umpimähkään yksi pallo, pannaan se takaisin ja nostetaan taas umpimähkään pallo. Mikä on todennäköisyys, että nostetut pallot ovat eriväriset?
- b) Mikä on vastaava todennäköisyys, jos laatikossa onkin kolme keskenään eriväristä palloa ja samalla tavalla nostetaan kaksi palloa?

7. Suorakulmion kaksi kärkeä on x -akselilla ja kaksi käyrällä

$$y = \frac{4}{2 + x^2}.$$

Mitkä ovat suorakulmion sivujen pituudet, kun sen pinta-ala on suurin mahdollinen?

8. Tietunnelin poikkileikkaus on osa alaspäin aukeavaa paraabelia. Tien leveys on 10 m, ja tunnelin poikkileikkauksen pinta-ala on $25,0 \text{ m}^2$. Määritä tunnelin korkeus senttimetrin tarkkuudella.
9. Tutki, kuinka monta juurta yhtälöllä

$$3 \tan x - 1 = 4x$$

on välillä $]-\pi/2, \pi/2[$.

10. Kolmio K_1 on tasakylkinen kolmio, jonka kanta on a ja korkeus b . Kolmio K_2 on suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituudet ovat a ja b . Kummalla kolmiolla on pidempi piiri?
11. Määritä ne geometriset sarjat, joiden summa on 2 ja toinen termi on $\frac{3}{8}$. Anna vastauksena sarjan ensimmäinen termi ja sarjan suhdeluku.
12. Osoita, että muotoa $p^2 - 1$ oleva luku on jaollinen luvulla 12, kun p on alkuluku ja suurempi kuin 3.

13. Funktion f kuvaajan kaarenpituus välillä $[a, b]$ on

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Laske funktion $\ln x$ kuvaajan kaarenpituus välillä $[1, 2]$ puolisuunnikassäännöllä jakamalla väli neljään osaväliin. Anna vastaus kolmen desimaalin tarkkuudella.

★**14.** Tarkastellaan lukujonoa $a_1 = \frac{9}{10}$, $a_2 = \frac{99}{100}$, $a_3 = \frac{999}{1000}$, \dots

- Määritä luvun a_n lauseke indeksin n avulla lausuttuna. (2 p.)
- Osoita, että lukujono on kasvava ja että $a_n < 1$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$ (3 p.)
- Määritä $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. (2 p.)
- Mikä luku on päättymätön desimaalikehitelmä $0,999\dots$? (2 p.)

★**15.** Funktio $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ määritellään seuraavasti:

$$f(x) = 2^{1-n} \sin x, \quad \text{kun } x \in [(n-1)\pi, n\pi[, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- Piirrä funktion kuvaaja, kun $x \in [0, 3\pi]$. (2 p.)
- Laske $\int_0^{3\pi} f(x) dx$. (2 p.)
- Laske $\int_0^{n\pi} f(x) dx$. (3 p.)
- Määritä $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} f(x) dx$. (2 p.)