Pitkä matematiikka 24.3.2010, ratkaisut:

1. a) $7x^7 + 6x^6 = 0 \Longleftrightarrow x^6(7x+6) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ tai $x = -\frac{6}{7}$.

b) $(\sqrt{a}+1)^2 - a - 1 = a + 2\sqrt{a} + 1 - a - 1 = 2\sqrt{a}$.

c) $\dfrac{3}{3-2x} < 0 \Longleftrightarrow 3 - 2x < 0 \Longleftrightarrow x > \frac{3}{2}$.

2. a) $\int_0^1 (e^x+1)dx = \overset{1}{\underset{0}{/}}\, e^x + x = e + 1 - e^0 = e$.

b) $D\,x\sin x = \sin x + x\cos x$.

c) $\log_2 x = 5 \Longleftrightarrow x = 2^5 \Longleftrightarrow x = 32$.

3. a) Suurin kulma α on pisintä sivua vastaava kulma. Sille $5^2 = 2^2 + 4^2 - 2\cdot 2\cdot 4\cdot\cos\alpha$. Tästä ratkeaa $\cos\alpha = -\frac{5}{16}$, joten $\alpha \approx 108{,}210^{\circ}$.

Vastaus: $108{,}2^{\circ}$.

b) Jos yhtälön juuret ovat $-2\pm\sqrt{6}$, on yhtälö muotoa $(x+2+\sqrt{6})(x+2-\sqrt{6}) = 0$ eli auki kehitettynä $x^2+4x-2=0$. Tämä on $x^2+px+q=0$, kun $p=4$ ja $q=-2$.

Vastaus: $p=4$, $q=-2$.

4. Olkoon pallon säde r ja kuution sivu a. Leikataan palloa pystysuoralla tasolla, joka kulkee kuution pohjan ja kannen lävistäjien kautta. Leikkauskuviossa on r-säteisen puoliympyrän sisällä suorakaide, jonka sivut ovat a ja $a\sqrt{2}$. Piirtämällä säde puoliympyrän keskipisteestä suorakaiteen kärkeen, saadaan suorakulmaisesta kolmiosta yhtälö $(a\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + a^2 = r^2$. Tästä ratkeaa $r = a\sqrt{\frac{3}{2}}$. Kuution tilavuuden suhde puolipallon tilavuuteen on $\dfrac{a^3}{\frac{2}{3}\pi r^3} = \dfrac{1}{\frac{2}{3}\pi\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{2}{3}} \approx 0{,}259899$.

Vastaus: 26 %.

5. Olkoon $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j}$ ja $\overline{b} = z\overline{i} + w\overline{j}$. Koska $\overline{b}\,||\,\overline{i}$, on $w=0$. Koska $\overline{a}+\overline{b} = (x+z)\overline{i} + y\overline{j} = 4\overline{i}+\overline{j}$, on $x+z=4$ ja $y=1$. Edelleen $\overline{a}\cdot\overline{b} = xz = x(4-x) = 4$, josta saadaan $x^2-4x+4=0$ eli $(x-2)^2=0$. Tämän ratkaisu on $x=2$, josta saadaan $z=2$.

Vastaus: $\overline{a} = 2\overline{i}+\overline{j}$ ja $\overline{b} = 2\overline{i}$.

6. a) Jos pallot ovat p ja s, saadaan kahdella nostolla jokin seuraavista neljästä tapauksesta: pp, ps, sp, ss. Suotuisia tapauksia on kaksi: ps ja sp, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

b) Jos pallot ovat p, s ja v, saadaan kahdella nostolla jokin seuraavasta yhdeksästä tapauksesta: pp, ps, pv, sp, ss, sv, vp, vs, vv. Suotuisia tapauksia on kuusi: ps, pv, sp, sv, vp, vs, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Vastaus: **a)** $\frac{1}{2}$, **b)** $\frac{2}{3}$.

7. Olkoon suorakulmion käyrällä oleva oikeanpuoleinen kärki $(x, y) = (x, \dfrac{4}{2+x^2})$, $x > 0$. Tällöin suorakulmion pinta-ala on $f(x) = 2x \cdot \dfrac{4}{2+x^2}$. Pinta-alan derivaatta on $f'(x) = \dfrac{8(2+x^2) - 2x \cdot 8x}{(2+x^2)^2} = \dfrac{16 - 8x^2}{(2+x^2)^2}$. Derivaatta häviää, kun $16 - 8x^2 = 0$ eli kun $x = \pm\sqrt{2}$. Selvästi $f'(x) > 0$, kun $0 < x < \sqrt{2}$ ja $f'(x) < 0$, kun $x > \sqrt{2}$. Näin ollen suorakulmion pinta-ala on suurin mahdollinen, kun $x = \sqrt{2}$. Sivujen pituudet ovat tällöin $2\sqrt{2}$ ja $\frac{4}{2+2} = 1$.

Vastaus: $2\sqrt{2}$ ja 1.

8. Paraabelin yhtälö on muotoa $y = -ax^2 + b$, missä $a > 0$ ja b on määrättävä ehdoista. Kun $y = 0$, on $x^2 = \frac{b}{a} = (\frac{10}{2})^2$, josta $b = 25a$. Paraabelin yhtälö on nyt muotoa $y = a(-x^2 + 25)$. Poikkileikkauksen pinta-ala on

$$A = \int_{-5}^{5} a(-x^2 + 25)dx = a \mathop{/}_{-5}^{5} -\frac{1}{3}x^3 + 25x = a(-\frac{250}{3} - 250) = \frac{500}{3}a,$$

joten ehdosta $A = 25$ seuraa $a = \frac{3}{20}$ ja $b = 25a = \frac{15}{4}$. Tunnelin korkeus on $b = 3{,}75$.

Vastaus: 3,75 m.

9. Funktion $f(x) = 3\tan x - 4x - 1$ derivaatta on $f'(x) = \dfrac{3}{\cos^2 x} - 4$. Derivaatta häviää välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, kun $\cos^2 x = \frac{3}{4}$ eli $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ eli $x = \pm\frac{\pi}{6}$. Testipisteiden perusteella $f'(x) > 0$, kun $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{6}$ tai $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ ja $f'(x) < 0$, kun $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$. Näin ollen $f(x)$ on kasvava, kun $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{6}$ tai $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ ja $f(x)$ on pienenevä, kun $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$. Koska $f(\frac{\pi}{6}) \approx -0{,}64 < 0$, on f:llä korkeintaan yksi nollakohta ja koska $f(1{,}2) \approx 1{,}9 > 0$, on f:llä tasan yksi nollakohta välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

10. Kolmion K_1 kyljen pituus on $\sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 + b^2}$, joten sen piiri $p_1 = a + 2\sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 + b^2}$. Kolmion K_2 piiri $p_2 = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$. Tutkitaan, onko K_2:llä pidempi piiri.

$p_1 \leq p_2 \iff a + 2\sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 + b^2} \leq a + b + \sqrt{a^2 + b^2} \iff$

$2\sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 + b^2} \leq b + \sqrt{a^2 + b^2} \iff 4((\frac{1}{2}a)^2 + b^2) \leq a^2 + 2b^2 + 2b\sqrt{a^2 + b^2} \iff$

$b \leq \sqrt{a^2 + b^2} \iff 0 \leq a^2$.

Viimeksi saatu epäyhtälö pätee, joten väite oli totta.

Vastaus: Kolmiolla K_2 on pidempi piiri.

11. Jos geometrisen sarjan ensimmäinen termi on a ja suhdeluku q, on oltava $\dfrac{a}{1-q} = 2$ ja $aq = \frac{3}{8}$ eli $a = \dfrac{3}{8q}$. Ehdoista saadaan yhtälö $\dfrac{3}{8q(1-q)} = 2$ eli $16q^2 - 16q + 3 = 0$. Yhtälön ratkaisu on $q = \dfrac{16 \pm \sqrt{16^2 - 12 \cdot 16}}{32} = \dfrac{16 \pm 8}{32}$ eli $q = \frac{1}{4}$ tai $q = \frac{3}{4}$. Vastaavasti $a = \frac{3}{8} \cdot 4 = \frac{3}{2}$ tai $a = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{2}$.

Vastaus: Joko $(a, q) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{4})$ tai $(a, q) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

12. Luvuista $p-1,\ p,\ p+1$ yksi on jaollinen kolmella. Jos p on alkuluku ja suurempi kuin 3, ei se voi olla jaollinen kolmella. Siis joko $p-1$ tai $p+1$ on jaollinen kolmella. Edelleen, koska p on alkuluku, on se pariton, joten $p-1$ ja $p+1$ ovat jaollisia kahdella. Tällöin niiden tulo $(p-1)(p+1)=p^2-1$ on jaollinen neljällä ja lisäksi kolmella eli on jaollinen luvulla 12. Väite on todistettu.

13. Funktion $f(x)=\ln x$ derivaatta $f'(x)=\dfrac{1}{x}$. Integraalin $\int_1^2 g(x)dx$ neljän osavälin puolisuunnikassääntö on

$\int_1^2 g(x)dx \approx S_4 = \frac{1}{4}[\frac{1}{2}g(1)+g(\frac{5}{4})+g(\frac{3}{2})+g(\frac{7}{4})+\frac{1}{2}g(2)]$.

Sijoittamalla kaavaan $g(x)=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ ja laskemalla arvot saadaan $S_4\approx 1{,}22509$.

Vastaus: 1,225.

***14.** **a)** Koska $a_1=1-\frac{1}{10},\ a_2=1-\frac{1}{10^2}$ ja $a_3=1-\frac{1}{10^3}$, on oltava $a_n=1-\frac{1}{10^n}$.

b) Koska $a_{n+1}-a_n=1-\frac{1}{10^{n+1}}-(1-\frac{1}{10^n})=\frac{1}{10^n}-\frac{1}{10^{n+1}}=\frac{9}{10^{n+1}}>0$, on $a_n\le a_{n+1}$ kaikilla arvoilla n eli lukujono on kasvava.

Edelleen, kaikilla arvoilla n on $a_n=1-\frac{1}{10^n}<1$.

c) Selvästi $\lim_{n\to\infty}a_n=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{10^n}=1$.

d) Desimaalilukuna $a_1=0{,}9,\ a_2=0{,}99,\ a_3=0{,}999$ ja $a_n=0{,}99...9$, missä on n yhdeksikköä. Näin ollen päättymätön desimaaliluku $0{,}999...=\lim_{n\to\infty}a_n=1$.

***15.** **a)** Funktion kuvaaja on välillä $[0,\pi[\ y=\sin x$, välillä $[\pi,2\pi[\ y=\frac{1}{2}\sin x$ ja välillä $[2\pi,3\pi[\ y=\frac{1}{4}\sin x$. Pisteessä $x=3\pi$ on funktion arvo $\frac{1}{8}\sin 0=0$.

b) $\int_0^\pi \sin x\,dx = \overset{\pi}{\underset{0}{/}} -\cos x = 1+1=2$, $\int_\pi^{2\pi}\sin x\,dx = \overset{2\pi}{\underset{\pi}{/}} -\cos x = -1-1=-2$, ja $\int_{2\pi}^{3\pi}\sin x\,dx=\int_0^\pi \sin x\,dx=2$.

Näin ollen

$\int_0^{3\pi} f(x)\,dx=\int_0^\pi \sin x\,dx+\frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi}\sin x\,dx+\frac{1}{4}\int_{2\pi}^{3\pi}\sin x\,dx = 2(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4})=\frac{3}{2}$.

c) Koska $\int_{3\pi}^{4\pi}\sin x\,dx=\int_\pi^{2\pi}\sin x\,dx=-2$, voidaan tämän ja kohdan b) perusteella päätellä, että $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sin x\,dx=(-1)^n 2$.

Jos määritellään $q=-\frac{1}{2}$, on siten

$$\int_0^{n\pi} f(x)\,dx = 2(1+q+q^2+...+q^{n-1}) = 2\cdot\frac{1-q^n}{1-q} = 2\cdot\frac{1-(-\frac{1}{2})^n}{1+\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}(1-(-\frac{1}{2})^n).$$

d) Kohdan c) perusteella $\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} f(x)\,dx=\frac{4}{3}(1-\lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{2})^n)=\frac{4}{3}$.